ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА. СЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

1.Изучение основных определений и положений теории интерполяции функции.

2.Изучение методов локальной и глобальной интерполяции.

3.Интерполирование функций многочленом Лагранжа.

4. Интерполирование кубическим сплайном

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Интерполяцией называется такой вид точечной аппроксимации, когда аппроксимирующая функция представляет собой алгебраический многочлен (полином) ϕ(x) степени n, который в n+1 точке (узле) xi (i=0,1,...,n), заданных на отрезке [a,b], совпадает со значением аппроксимируемой функции f(x) в этих узлах, т.е. имеем yi=f(xi)=ϕ(xi), i=0,1,...,n.

**Линейная и квадратичная** интерполяция. Отрезок [a,b] делится узлами xi (i=0,1,...,n) на n частичных отрезков [xi-1,xi], при этом x0=a, xn=b.

При линейной интерполяции аппроксимируемая функция y=f(x) заменяется на каждом частичном отрезке [xi-1,xi] (i=1,2,...,n) многочленом первой степени т.е. прямой линией:

 (1)

проходящей через две точки, с координатами xi-1,yi-1=y(xi-1) и xi,yi=y(xi).

Следовательно на каждом отрезке [ xi-1,xi ] имеется своя прямая линия, которая описывается уравнением, проходящим через две точки. В результате для всего отрезка получаем ломаную линию, которая в узлах xi совпадает со значением функции. Коэффициенты ki и bi определяются из следующей системы уравнений:

, i=1,...n. (2)

Из (2) получаем значения неизвестных коэффициентов:

 (3)

Более точной является квадратичная интерполяция. В качестве интерполяционной функции на отрезке [ xi-1,xi+1 ] принимается квадратный трехчлен:

 (4)

Так как это уравнение параболы, то такую интерполяцию также называют параболической. Уравнение параболы содержит три неизвестных коэффициента ai, bi, ci, которые определяются из системы уравнений:

. (5)

Интерполяция для любой точки x отрезка [x0,xn] проходит по трем ближайшим точкам.

При линейной и параболической интерполяции имеются точки, где производная испытывает скачок. При линейной интерполяции это происходит в узлах, а при квадратичной там, где одни три точки заменяются на другие. Этого недостатка лишена интерполяция сплайнами.

**Интерполяция сплайнами.** Сплайн (от англ. слова “splane” - гибкий) это функция, которая на всем отрезке интерполяции непрерывна вместе со своими *k* первыми производными (*k≤m-1)* и на каждом частичном отрезке представляет алгебраический многочлен (полином) степени *m*.

На практике широкое распространение получили сплайны третьей степени, имеющие на [*a,b*] непрерывную, по крайней мере, первую производную. Эти сплайны называются кубическими и обозначаются *S3(x)* (без указания дефекта).

Пусть на отрезке [*a,b*] в узлах сетки D заданы значения некоторой функции

*fi =f(xi), i=0,...,n*.

Интерполяционным кубическим сплайном *S3(x)* называется сплайн

*S3(x)=аi0 +аi1(x - xi)+аi2(x - xi)2 +аi3(x - xi)3*, *x*Î[*xi, xi+1*], (6)

удовлетворяющий условиям

*S3(xi)=f(xi), i=0,...,n*. (7)

Сплайн (6) на каждом из отрезков [*xi, xi+1*],*i=0,...,n-1* определяется четырьмя коэффициентами, и поэтому для его построения на всем промежутке [*a,b*] необходимо определить *4n* коэффициентов. Для их однозначного определения необходимо задать *4n* уравнений.

Условие (7) дает *2n* уравнений, при этом функция *S3(xi)*, удовле­творяющая этим условиям, будет непрерывна во всех внутренних узлах.

Условие непрерывности производных сплайна https://studfiles.net/html/1442/288/html_eO01zEKF0h.P2sg/img-62Ttu6.png,*r=1,2* во всех внутренних узлах *xi*,*i=1,...,n-1* сетки D дает *2(n-1)* равенств.

Вместе получается *4N-2* уравнений.

Два дополнительных условия обычно задаются в виде ограничений на значение производных сплайна на концах промежутка [*a,b*] и называются краевыми условиями.

Наиболее употребительны следующие типы краевых условий:

а) *S'3(а)=f'(а), S'(b)=f'(b)* ;

б) *S"3(а)=f"(а), S"(b)=f"(b)* ;

в) https://studfiles.net/html/1442/288/html_eO01zEKF0h.P2sg/img-8Z4Bl9.png;

г) *S'''3(xp+0)=S'''3(xp-0), р =1, n-1*.

Через краевые условия в конструкцию сплайна включаются параметры, выбирая которые можно управлять его поведением, особенно возле концов отрезка [*a,b*].

Условия типа в) носят названия периодических. Естественно требовать их выполнения в том случае, когда интерполируемая функция периодическая с периодом (*b-a*).

Если известны *f'(x)* или *f"(x)* в точках *а* и *b*, то естественно воспользоваться краевыми условиями типа а) или б).

Если производные неизвестны, то в большинстве случаев наилучшим решением будет применение краевых условий типа г).

Вместо значений производных можно использовать их разностные аналоги. При этом точность интерполяции вблизи концов падает.

Иногда предлагается принимать

*S"3(а)=S"3(b)=0*.

В этом случае вблизи концов точность интерполяции функции и ее первой производной уменьшается и становится соизмеримой с точностью интерполяции сплайном первой степени, что резко ухудшает всю картину.

**Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Рассмотрим глобальную интерполяцию на отрезке [x0,xn], т.е. построение единого интерполяционного многочлена степени n

 (8)

который в n+1 узле xi (i=0,1,...,n) совпадает со значениями аппроксимирующей функции.

 (9)

Коэффициенты ak (k=0,1,...,n) определяются из системы линейных уравнений (7) n+1 порядка.

При больших n необходимо решать систему линейных уравнений большого порядка, т.е. проводить большой объем вычислений. Избежать этого позволяет обобщенный многочлен Лагранжа степени n:

 (10)

где li(x) - многочлены Лагранжа определяемые по формулам:

 (11)

где выражения в двойных скобках не должны учитываться, они написаны для пояснения алгоритма, по которому образуются эти многочлены.

Из (10) следует:

 (12)

Отметим, что при n=1 многочлен Лагранжа представляет собой линейную интерполяцию на отрезке [x0,x1], а при n=2 - квадратичную интерполяцию на отрезке [x0,x2].

**Точность интерполяции.** Погрешность интерполяции Rn(x) зависит от числа узлов n и равна:

 (11)

В узлах интерполяции погрешность равна нулю. Ее величина зависит от вида аппроксимирующей функции и вычисляется по следующей формуле:

 (12)

где ξ неизвестная точка на отрезке [x0,xn].

Для равномерного распределения узлов, когда xi-xi-1=h, для всех i=1,2,...,n (равномерная сетка с шагом h) можем записать:

 (13)

III. ЗАДАНИЕ.

1.Написать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции f(x), которая задана на отрезке [x0,xn] в четырех точках (узлах). Значения функции взять из таблицы заданий Оценить погрешность интерполяции, предполагая, что ⏐f(n+1)(ξ)⏐≤1.

2.Разработать текст программы для приближенного вычисления значений функции f(x) и погрешности интерполяции в любой точке отрезка [x0,xn],

3.На ЭВМ набрать и отладить программу.

4.Провести вычисления функции в точках между заданными узлами. Провести интерполяцию с помощью программы MATHCAD и сравнить результаты.

5. Составить сплайн, заданный интерполяционной таблицей.

6. Проверить практическое совпадение значений «соседних» выражений сплайна в узловых точках, а также совпадение их со значениями функции в узлах интерполяции.

IV. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.

1. Индивидуальное задание.

2. Вывод основных формул.

3. Текст программы.

4. Результаты расчета.

5. Оценка погрешности

6. Выводы

V. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Таблица значения f(x) | | | | |
| nn | x/y | i=0 | i=1 | i=2 | i=3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1. | x  y | 0.1  0 | 0.2  1 | 0.3  3 | 0.4  -1 |
| 2. | x  y | 0.5  -1 | 0.6  0 | 0.7  1 | 0.8  5 |
| 3. | x  y | 1.0  -3 | 1.5  -2 | 2.0  0 | 2.5  0.5 |
| 4. | x  y | 1.2  5 | 1.4  2 | 1.6  0 | 1.8  -5 |
| 5. | x  y | 1.0  -8 | 1.2  -3 | 1.4  -4 | 1.6  0 |
| 6. | x  y | 0  5 | 0.2  0 | 0.4  2 | 0.6  -1 |
| 7. | x  y | 0  -1 | 0.5  0 | 1.0  -1 | 1.5  2 |
| 8. | x  y | 1.0  0 | 1.2  -3 | 1.4  2 | 1.6  0 |
| 9. | x  y | 0.2  -2 | 0.4  0 | 0.6  3 | 0.8  0 |
| 10. | x  y | 1.0  -3 | 1.5  2 | 2.0  0 | 2.5  -0.5 |
| 11. | x  y | 0.1  0 | 0.2  -1 | 0.3  -3 | 0.4  1 |
| 12. | x  y | 0.5  1 | 0.6  0 | 0.7  -1 | 0.8  -5 |
| 13. | x  y | 1.0  3 | 1.5  2 | 2.0  0 | 2.5  -0.5 |
| 14. | x  y | 1.2  -5 | 1.4  -2 | 1.6  0 | 1.8  5 |
| 15. | x  y | 1.0  8 | 1.2  3 | 1.4  4 | 1.6  0 |